Ginzburg-Landau 方程式について

都築俊夫（阪大理）

（12月5日受理）

1° Ginzburg-Landau の現象論的方程式[1]は，静磁場中におかれた超電導体の振舞をよく記述することは，最近ますます明らかになつて来た。この方程式の微視的理論による導出は，Gor'kov[2] によりなされ，今では Ginzburg-Landau-Gor'kov 方程式と呼ばれていることは，よく知られている。しかしながら，この方程式の適用領域は，転移温度の近くに限られている。従つて，この方程式を低温領域に拡張することは，重要な問題である。この試みは，色々な人々によりなされようとしたが，彼らは，Gor'kov と同様，高温から即ち，正常状態の側からの，或る種の近似による方法を用いている。今のところ，この方向での拡張の満足な結果はないと思う。

2° これは当然のことと思われる。実際，金属に静磁場をかけたとき，正常状態では，電子は平均の速度が零であるように運動量が変化するが，超電導状態では平均の運動量が零であるように応答する。転移温度のすぐ近くの温度領域では，ほとんどの電子は正常状態にあるので，Gor'kov のように，「正常近似」をすることは承認されるが，彼の立場に立つて，低温まで拡張しようとすると，超電導金属の本質を，見誤つてしまう。このことは，著者[3]（有限温度）及び Nambu-Tuan[4]（絶対零度）の磁場によるエネルギー・ギャップの減少の計算でも実際に示されている。

従つて，G－L方程式の拡張は，Gor'kov とは違つた立場から，いわば「低温近似」でなされなければならないと思う。

3° この報告では，著者の計算[3]をもとにして，すべての温度領域に使用出来るように，G－L方程式を拡張する。まず必要な式を書いておく。

$$D(\vec{l})\triangle_2(\vec{l})=\sum_{\vec{q}}\sum_{ij}^{xyz}r_{ij}(\vec{l},\vec{q})A_i(\vec{q})A_j(\vec{l}-\vec{q}), \qquad (1)$$

$$r_{ij}(\vec{l},\vec{q})=\frac{e^2}{m^2}gT\sum_{\omega\vec{p}}\Big[\delta_{ij}G_{o\omega}(\vec{p}_+)\ F_{o\omega}(\vec{p}_-)$$

$$+\frac{1}{m}p_{+i}p_{-j}\{G_{o\omega}(\vec{p}_+-\vec{q})(F_{o\omega}(\vec{p}_+)G_{o\omega}(\vec{p}_-)+G_{o\omega}(\vec{p}_+)F_{o-\omega}(\vec{p}_-)$$

$$-F_{o\omega}(\vec{p}_+-\vec{q})(G_{o\omega}(\vec{p}_+)G_{o-\omega}(\vec{p}_-)-F_{o\omega}(\vec{p}_+)F_{o\omega}(\vec{p}_-))\}\Big], \qquad (2)$$

$$D(\vec{l})=1-gT\sum_{\omega\vec{p}}\{G_{o\ -\omega}(\vec{p}_+)G_{o\omega}(\vec{p}_-)-F_{o\ -\omega}(\vec{p}_+)F_{o\omega}(\vec{p}_-)\} \qquad (3)$$

ここで，$\triangle_2(l)$は，磁場を摂動として取扱つたときのエネルギー・ギャップ函数の二次変化である。一次の変化は，クーロンゲージ $\vec{q}\cdot\vec{A}(\vec{q})=0$ のため零となる。

超電導体はLondon型であるとしよう。従つて$q\xi_0\ll 1$ である，ここでξ_0 はコヒーレンスの距離である。又磁場は十分弱くて，△も十分ゆつくり空間的に変化するとする。即ち，$\xi_0 l\ll 1$とする。この条件のもとで，$D(\vec{l})$ 及び$r_{ij}(\vec{l},\vec{q})$をl及びqについて展開し，q^2，ql，l^2 まで取る。この際，簡単のため，$\vec{q}$ 及び$\vec{l}$はz成分のみ，$\vec{A}$は$A_z=0$ ととる。計算の結果は

$$r_{xx}(l,q)=r_{yy}(l,q)$$

$$=-\frac{e^2v_F^3\triangle_0\,gm^2}{5\pi}S_{3/2}\Big[\Big(1-\frac{3}{2}\triangle_0^2 I_{5/2}\Big)-\frac{v_F^2}{20}\Big(I_{5/2}-\frac{5}{2}I_{7/2}\Big)$$

$$\times\{(l-q)^2+q(l-q)+q^2\}\Big], \qquad (4)$$

$$D(l)=\frac{m^2v_F\,g\triangle_0^2}{\pi}S_{3/2}\Big[1+\frac{v_F^2l^2}{12\triangle_0^2}\Big\{1-\frac{3}{2}\triangle_0^2 I_{5/2}\Big\}\Big] \qquad (5)$$

となる。ここで，$\triangle_0$ は温度TでのBCS エネルギーギヤップである。又

$$S_n = T\sum_{\omega>0} \frac{1}{\left[\omega^2+\triangle_0^2\right]^n} \tag{6}$$

$$I_n = S_n \,/\, S_{3/2} \tag{7}$$

である。(4)(5) を(1)に代入し，逆変換して，空間表示に直すと

$$\frac{1}{2m}\left\{\nabla^2\triangle_2(r)-(2e)^2A^2(r)\triangle_0\right\}\frac{3}{\varepsilon_F}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{2}\triangle_0^2 I_{5/2}}\triangle_0^2\triangle_2(r)$$

$$-\frac{e^2\varepsilon_F}{5m^2}\cdot\frac{I_{5/2}-\frac{5}{2}\triangle_0^2 I_{7/2}}{1-\frac{3}{2}\triangle_0^2 I_{5/2}}\left\{(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2+2\vec{A}\cdot(\nabla^2\vec{A})\right\}\triangle_0=0 \tag{8}$$

となる。ここで，Ginzburg[1] やBardeen[5]に従つて，G.L. 方程式を

$$\left[\frac{1}{2m}(\vec{\nabla}-2ie\vec{A})^2+f(\triangle)-\frac{e^2\varepsilon_F}{5m^2}\cdot\frac{I_{5/2}-\frac{5}{2}\triangle^2 I_{7/2}}{1-\frac{3}{2}\triangle^2 I_{5/2}}\right.$$

$$\left.\times\left\{(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2+2\vec{A}\cdot(\nabla^2\vec{A})\right\}\right]\triangle(r)=0 \tag{9}$$

ととる。$f(\triangle)$ はいわゆるGinzburg 項である。$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ ，$\triangle_1(r)=0$を考りよして，(8)と(9)を対応ずけると

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\triangle}\left[\triangle f(\triangle)\right]\right\}_{\triangle=\triangle_0}=-\frac{3}{\varepsilon_F}\cdot\frac{\triangle_0^2}{1-\frac{3}{2}\triangle_0^2 I_{5/2}} \tag{10}$$

となる。ところで，$A=0$ のときには，$\triangle$はBCS の$\triangle_0$ になり従つて

$$f(\triangle_0)=0 \tag{11}$$

である。(11)を用いれば，(10)は

$$f(\triangle)=-\frac{3}{\varepsilon_F}\int_{\triangle_0}^{\triangle}\frac{\triangle' d\triangle'}{1-\frac{3}{2}\triangle'^2 I_{5/2}(\triangle')} \tag{12}$$

となる。これが，Ginzburg 項の決定方程式である。

一方電流密度は

$$\vec{J}(\vec{r})=2\Big[\frac{ie}{2m}T\sum_{\omega}\{(\vec{\nabla}'-\vec{\nabla})G_{\omega}(\vec{r},\vec{r}')\}_{r'\to r}$$

$$-\frac{e^2}{m}\vec{A}(\vec{r})\,T\sum_{\omega}G_{\omega}(\vec{r}',\vec{r})\Big] \tag{13}$$

だから，$\vec{J}=\vec{J}_0+\vec{J}_1+\vec{J}_2+\cdots\cdots$と展開すると，$\vec{J}_0=0$で，$\vec{J}_1(\vec{r})$ のフーリエ成分は，よく知られているように，London 領域で

$$\vec{J}_1(\vec{l})=-\frac{ne^2}{m}\cdot 2\pi\triangle_0^2\ S_{3/2}\vec{A}(\vec{l}) \tag{14}$$

となる。又$\vec{J}_2(\vec{r})$のフーリエ成分は

$$\vec{J}_2(\vec{l})=\frac{2e}{m}T\sum_{\omega\vec{p}}\vec{p}\,G_{2\omega}(\vec{p}_+,\vec{p}_-)$$

$$-\frac{2e^2}{m}\sum_{q}\vec{A}(\vec{q})T\sum_{\omega\vec{p}}G_{1\omega}(\vec{p}_+-\vec{q},\ \vec{p}_-) \tag{15}$$

$$G_{1\omega}(\vec{p}_+-\vec{q},\vec{p}_-)=-\frac{e}{m}\vec{A}(\vec{l}-\vec{q})\cdot\vec{p}_-\{G_{0\omega}(\vec{p}_+-\vec{q})G_{0\omega}(\vec{p}_-)+F_{0\omega}(\vec{p}_+-\vec{q})F_{0\omega}(\vec{p}_-)\} \tag{16}$$

$$G_{2\omega}(\vec{p}_+,\vec{p}_-)=-\triangle_2(\vec{l})G_{0\omega}(\vec{p}_+)F_{0\omega}(\vec{p}_-)-\triangle_2^*(-\vec{l})G_{0\omega}(\vec{p}_-)F_{0\omega}(\vec{p}_+)$$

$$+\frac{e^2}{2m}\sum_{\vec{q}}\vec{A}(\vec{q})\cdot\vec{A}(\vec{l}-\vec{q})\{G_{0\omega}(\vec{p}_+)G_{0\omega}(\vec{p}_-)-F_{0\omega}(\vec{p}_+)F_{0\omega}(\vec{p}_-)\}$$

$$+\frac{e^2}{2m^2}\sum_{\vec{q}}\vec{p}_+\cdot\vec{A}(\vec{q})\ \vec{p}_-\cdot\vec{A}(\vec{l}-\vec{q})$$

$$\times\left[G_{0\omega}(\vec{p}_{+}-\vec{q})\left\{G_{0\omega}(\vec{p}_{+})G_{0\omega}(\vec{p}_{-})-F_{0\omega}(\vec{p}_{+})F_{0\omega}(\vec{p}_{-})\right\}\right.$$

$$\left.+F_{0\omega}(\vec{p}_{+}-\vec{q})\left\{G_{0\omega}(\vec{p}_{+})F_{0\omega}(\vec{p}_{-})+G_{0\omega}(\vec{p}_{-})F_{0\omega}(\vec{p}_{+})\right\}\right] \tag{17}$$

となる。すぐ分るように，我々の geometry では

$$\vec{J}_2(\vec{l})=-\frac{2e}{m}T\sum_{\omega\vec{p}}\left\{\triangle_2(\vec{l})+\triangle_2^*(-\vec{l})\right\}\vec{p}\,G_{0\omega}(\vec{p}_{+})F_{0\omega}(\vec{p}_{-})$$

$$=\frac{\pi n e}{2m}\left\{\triangle_0\vec{l}\triangle_2(\vec{l})-\triangle_0\vec{l}\triangle_2^*(-\vec{l})\right\}S_{3/2} \tag{18}$$

となる。従つて，全電流は

$$\vec{J}(\vec{l})=\frac{\pi n}{2}S_{3/2}\left[\frac{2e}{2m}\left\{\triangle_0\vec{l}\triangle_2(\vec{l})-\triangle_0\vec{l}\triangle_2^*(-\vec{l})\right\}\right.$$

$$\left.-\frac{(2e)^2}{m}\vec{A}(\vec{l})\triangle_0^2\right] \tag{19}$$

だから

$$\vec{J}(\vec{r})=\frac{\pi n}{2}S_{3/2}\left[-\frac{2ei}{2m}\left\{\triangle^*(\vec{r})\vec{\nabla}\triangle(\vec{r})-\triangle(\vec{r})\vec{\nabla}\triangle^*(\vec{r})\right\}\right.$$

$$\left.-\frac{(2e)^2}{m}\vec{A}(\vec{r})\,|\triangle(\vec{r})|^2\right] \tag{20}$$

となる。Ginzburg–Landau の波動函数を

$$\Psi(\vec{r})=\sqrt{\frac{\pi n}{2}S_{3/2}}\,\triangle(\vec{r}) \tag{21}$$

と定義すれば，(9)，(20) は

$$\left[\frac{1}{2m}\left\{\vec{\nabla}-2ie\vec{A}(\vec{r})\right\}^2+f(\Psi)-\frac{\pi\triangle_0^2}{40n}\left(\frac{\xi_0}{\lambda_L}\right)^2\frac{I_{5/2}-\frac{5}{2}\triangle^2 I_{7/2}}{1-\frac{3}{2}\triangle^2 I_{5/2}}\right.$$

$$\times\{(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2+2A\cdot(\nabla^2\vec{A})\}]\ \Psi(\vec{r})=0 \tag{22}$$

$$\vec{J}(\vec{r})=\frac{2e}{2mi}\{\Psi^*(\vec{r})\vec{\nabla}\Psi(\vec{r})-\Psi(\vec{r})\vec{\nabla}\Psi^*(\vec{r})\}$$

$$-\frac{(2e)^2}{m}A(\vec{r})|\Psi(\vec{r})|^2 \tag{23}$$

となる。これらが一般化されたG－L方程式である。（22）には新しい項が加わつていることに注意しよう。

4°（22）は$T\sim T_c$では，GLG方程式と完全に一致することを示そう。この場合には，（22）の最後の項は，少ししか寄与しないので無視する。$\triangle$は十分小さいので，（12）を$\triangle'$で展開し，初項のみを取ると

$$f(\Psi)=\frac{3}{\pi n\varepsilon_F S_{3/2}}\{\Psi_0^2-|\Psi|^2\} \tag{24}$$

となる。又

$$S_{3/2}\simeq\frac{1}{\pi^3T_c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}=\frac{7\zeta(3)}{8\pi^3T_c^2}$$

となる。ζはリーマンのζ函数である。従つて，

$$\Psi(r)=\sqrt{\frac{7\zeta(3)n}{4\pi T_c}}\triangle(r) \tag{25}$$

となる。又

$$\Psi_0^2=\frac{7\zeta(3)n}{(4\pi T_c)^2}\triangle_0^2=\frac{n}{2}\cdot\frac{T-T_c}{T_c}$$

だから，GLGが定義したパラメーター

$$\lambda = \frac{7\zeta(3)\varepsilon_F}{12(\pi T_c)^2}$$

を用いると，(22) は

$$\left[\frac{1}{2m}\left\{\vec{\nabla} - 2ie\vec{A}(\vec{r})\right\}^2 + \frac{1}{\lambda}\left\{\frac{T_c - T}{T_c} - \frac{2}{n}|\Psi|^2\right\}\right]\Psi(\vec{r}) = 0 \qquad (26)$$

となる。(25),(26) はGLGと完全に一致する。

5° TがT_c からだんだんさがるにつれて，磁気エネルギー項が重要になつてくる。$T \ll T_c$ で，(22) を解こう。著者の論文[6]で示されるように，$T \ll T_c$ では

$$S_{3/2} \simeq \frac{1}{2\pi\triangle^2}\left\{1 - \sqrt{\frac{2\pi\triangle}{T}}\, e^{-\triangle/T}\right\}$$

$$I_{5/2} \simeq \frac{2}{3\triangle^2}\left\{1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi\triangle^3}{T^3}}\, e^{-\triangle/T}\right\}$$

$$I_{7/2} \simeq \frac{8}{15\triangle^4}\left\{1 - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{2\pi\triangle^5}{T^5}}\, e^{-\triangle/T}\right\}$$

となり，従つて

$$f(\triangle) \simeq -\frac{6}{\varepsilon_F}\int_{\triangle_0}^{\triangle} \triangle' \sqrt{\frac{T^3}{2\pi\triangle'^3}}\, e^{\triangle'/T}\, d\triangle'$$

$$\simeq \frac{6T^2}{\varepsilon_F}\sqrt{\frac{T}{2\pi\triangle_0}}\, e^{\triangle_0/T}\left\{1 - e^{-(\triangle_0 - \triangle)/T}\right\} \qquad (27)$$

となる。これらを用いると，(22) は

$$\left[\frac{1}{2m}\left\{\vec{\nabla} - 2ie\vec{A}(\vec{r})\right\}^2 + \frac{6T^2}{\varepsilon_F}\sqrt{\frac{T}{2\pi\triangle_0}}\, e^{\triangle_0/T}\left\{1 - \exp\left(-\frac{2\triangle_0}{\sqrt{nT}}(\Psi_0 - \Psi)\right)\right\}\right.$$

$$+\frac{\pi}{30n}\left(\frac{\xi_0}{\lambda_L}\right)^2\sqrt{\frac{T^3}{2\pi\triangle_0^3}}\;e^{\triangle_0/T}\left\{1-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2\pi\triangle_0^5}{T^5}}\;e^{-\triangle_0/T}\right\}$$

$$\times\left\{(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2+2\vec{A}\cdot(\nabla^2\vec{A})\right\}\Big]\;\Psi(\vec{r})=0 \qquad (28)$$

となる。運動エネルギーの項は，他の項に比して小さいので，簡単のため無視すれば，

$$\Psi(\vec{r})=\Psi_0+\frac{\sqrt{n}\,T}{2\triangle_0}\ln\Big[1+\frac{\pi\varepsilon_F}{180n\triangle_0T}\left(\frac{\xi_0}{\lambda_L}\right)^2\left\{1-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2\pi\triangle_0^5}{T^5}}\,e^{-\triangle_0/T}\right\}$$

$$\times\left\{(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2+2\vec{A}\cdot(\nabla^2\vec{A})\right\}\Big] \qquad (29)$$

となる。磁場が十分弱いときには

$$\Psi(\vec{r})=\Psi_0+\frac{\pi\varepsilon_F}{180n\triangle_0}\left(\frac{\xi_0}{\lambda_L}\right)^2\left\{1-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2\pi\triangle_0^5}{T^5}}\,e^{-\triangle_0/T}\right\}$$

$$\times\left\{(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2+2\vec{A}\cdot(\nabla^2\vec{A})\right\} \qquad (30)$$

となる。もとの△でかくと

$$\triangle(\vec{r})=\triangle_0+\frac{\pi^2}{90}\cdot\frac{e^2v_F^2}{\triangle_0}\xi_0^2\left\{1-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2\pi\triangle_0^5}{T^5}}\times e^{-\triangle_0/T}\right\}$$

$$\times\left\{(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2+2\vec{A}\cdot(\nabla^2\vec{A})\right\} \qquad (31)$$

である。これは著者(3)及びNambu-Tuan (4) の結果と全く一致する。

6° 我々は摂動論から出発して，一般化されたGL方程式を導いた。それらは(21),(22),(21)及び(12) で与えられる。転移点の近くではGLG方程式と完全に一致する。しかし，低温では，全く新しい項が現われる。先に述べた理由により，この項は，Gor'kov のような「正常近似」では得られないものである。従つて，Gor'kovよりは，より一般的なGL方程式の微

視的証明とも云えるだろう。

今後の問題について云えば，磁場を摂動として取扱わないようなやり方で，導出を試みる必要があろう。数理物理としても，面白い問題である。

終りに，色々御討論下さつた，阪大教養部の西山教授に感謝します。

参考文献

(1) V.L. Ginzburg, L.D. Landau, ZETF 20 1064(1950)
(2) L.P. Gor'kov, ZETF 36 1918(1959)
(3) T. Tsuzuki, Progr. Theor. Phys. 30 569(1963)
(4) Y. Nambu, S.F. Tuan, Phys. Rev. 128 2622(1962)
(5) J. Bardeen, Encyclopedia of Physics, 15 274
(6) T. Tsuzuki, Progr. Theor. Phys. to be published.